

基于 Adams 离散和 Newmark- β 法求解 分数阶 van der Pol 系统*

姜宏杰, 刘祚秋, 吕中荣, 刘广

中山大学航空航天学院, 广东 广州 510006

摘要: 文章着重研究了含分数阶微分算子的 van der Pol 方程的数值解法。首先, 基于 Adams 离散提出了一种针对 Caputo 分数阶导数的离散格式; 然后, 进一步基于 Newmark- β 法构造了完整的逐步迭代格式; 最后, 通过 Newton-Raphson 迭代求得了非线性系统的响应。在算例分析部分, 讨论了分数阶次为 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 < \alpha < 2$ 的 van der Pol 系统的数值响应。当 $\alpha \rightarrow 1$ 和 $\alpha \rightarrow 2$ 时, 将所提算法和四阶 Runge-Kutta 法进行了对比。结果表明, 所提数值方法对整数阶微分系统也同样适用。

关键词: 分数阶导数; van der Pol 系统; Adams 离散; Newmark- β 法; 数值解

中图分类号: V21 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2022) 05-0126-07

Solving fractional van der Pol system based on Adams discretization and Newmark- β method

JIANG Hongjie, LIU Zuoqiu, LU Zhongrong, LIU Guang

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China

Abstract: This paper focuses on the numerical solution method of the van der Pol equation with fractional differential operators. In this paper, a discretization scheme based on the Adams discretization is proposed for Caputo fractional derivative. Then, a complete iterative scheme is constructed based on the Newmark- β method. Finally, the numerical solution of the nonlinear discretization equation is obtained by Newton-Raphson iteration. In the numerical examples, the numerical responses of van der Pol systems with fractional order $0 < \alpha < 1$ and $1 < \alpha < 2$ are discussed respectively. Moreover, the comparison between the proposed method and the fourth-order Runge-Kutta method is also discussed. The results proved that the proposed numerical scheme is also suitable for integer-order differential systems.

Key words: fractional-order derivative; van der Pol system; Adams discretization; Newmark- β method; numerical solution

与整数阶导数相比, 分数阶导数具有方程简洁和参数意义明确等优点, 通过分数阶微分系统描述的现象更加接近于真实的自然现象, 因此分数阶导数在非线性振动^[1]、控制理论^[2]、参数识别^[3-5]等领域有广泛的应用。vdP(van der Pol)系统^[6]最初是荷兰工程师 Balthazar van der Pol 在研究三极管的振荡效应中提出的。作为一种典型的自激系统, 其在不同的参数条件下能够展现出多种丰富的动力学现象, 因此基于 vdP 系统的研究产生了众多的学术成果。

* 收稿日期: 2021-04-17 录用日期: 2021-05-21 网络首发日期: 2022-01-26

基金项目: 国家自然科学基金 (11272361, 11972380)

作者简介: 姜宏杰 (1996年生), 男; 研究方向: 非线性振动; E-mail: jianghj7@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 刘广 (1992年生), 男; 研究方向: 非线性振动、参数识别等; E-mail: liug36@mail.sysu.edu.cn

目前, 学者们也针对含分数阶导数的 vdP 系统进行了研究。Barbosa 等^[7]通过分析分数阶 vdP 系统的相图、分岔图以及借谱分析等, 较为详细地研究了分数阶 vdP 振动系统在时域和频域的动力学行为; Tavazoei 研究了分数阶 vdP 系统的极限环与初始条件的关系, 并给出了存在极限环的解析判据; Chen 等^[8]用相轨迹图和庞加莱映射研究了分数阶 vdP 系统的混沌动力学行为, 发现分数阶阶次会直接导致系统进入混沌状态。毛北行等^[9]基于 Lyapunov 稳定性理论给出了分数阶 Duffing-van der Pol 系统混沌同步问题的两个充分性条件。韦鹏等^[10]以含分数阶 vdP 系统为对象, 研究了其超谐共振时的动力学特性, 得到了超谐共振周期响应的稳定性判断准则, 同时提出等效非线性阻尼和非线性稳定性条件参数的概念。

上述是从定性角度来描述和分析分数阶 vdP 系统的各种性质, 定量的研究则需要获取系统较为精确的数值解或解析/半解析解^[11-12]。和整数阶非线性系统不同的是, 分数阶微分算子的引入使得系统的解析/半解析解的求解难度急剧上升, 相关的成果非常少。所以, 现阶段我们更加关注分数阶 vdP 系统的数值求解。对于整数阶非线性系统, 数值算法包括有限差分法^[13]、Runge-Kutta 法^[14]、精细积分法^[15]、预估校正法^[16]等。对于分数阶微分系统, 即便是数值方法也尚在发展当中。

Newmark- β 法是一种非常成熟的数值方法, 它是基于 t_i 时刻的运动状态 u_i 、 \dot{u}_i 、 \ddot{u}_i , 然后进一步计算 t_{i+1} 时刻状态, 逐步获得结构动力响应的逐步积分法。Newmark- β 法通过简单的参数设置便可以无条件稳定, 且编程简单易于实现, 这些特点使其在整数阶微分系统中得到了广泛应用。在本文中, 我们将基于 Adams 离散, 提出一种针对 Caputo 分数阶导数的离散格式, 然后进一步基于 Newmark- β 法构造出完整的逐步迭代格式, 最后通过 Newton-Raphson 迭代^[17]来进一步求得分数阶 vdP 系统的响应。

1 基于 Adams 离散和 Newmark- β 法的迭代格式

1.1 对分数阶算子 $D^\alpha x$ 进行 Adams 离散

对于如下形式的分数阶 vdP 方程^[18]

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)D^\alpha x + x = 0, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 μ 为阻尼系数, $D^\alpha x$ 表示分数阶微分算子, α 为对应的分数阶阶次。分数阶导数 $D^\alpha x$ 通常有 Riemann-Liouville 定义、Caputo 定义和 Grünwald-Letnikov 定义^[19-21]。本文中, 分数阶算子 $D^\alpha x$ 采用 Caputo 定义^[22]。当分数阶次 $0 < \alpha < 1$ 时, 有^[23]

$$D^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2)$$

式中 $\Gamma(\alpha)$ 为 Gamma 函数, τ 为积分变量。对于方程 (2), 采用单步 Adams 法对其进行离散^[24], 有

$$D^\alpha x(t_n) = \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} \dot{x}_i + c_{n,n} \dot{x}_n \right), \quad (3)$$

式中 Δt 为时间步长, 且 $\dot{x}_i = \dot{x}(t_i)$, $c_{i,n}$ 为求积系数。 $c_{i,n}$ 的具体形式为

$$c_{i,n} = \begin{cases} n^{2-\alpha} - (n-1+\alpha)(n+1)^{1-\alpha}, & i=0, \\ (n-i+2)^{2-\alpha} + (n-i)^{2-\alpha} - 2(n-i+1)^{2-\alpha}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ 1, & i=n. \end{cases} \quad (4)$$

当分数阶阶次 $1 < \alpha < 2$ 时, $D^\alpha x$ 的具体形式为

$$D^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau. \quad (5)$$

类似地, 根据 Adams 离散法则将 (5) 式离散为

$$D^\alpha x(t_n) = \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} d_{i,n} \ddot{x}_i + d_{n,n} \ddot{x}_n \right), \quad (6)$$

其中求积系数 $d_{i,n}$ 为

$$d_{i,n} = \begin{cases} n^{3-\alpha} - (n-2+\alpha)(n+1)^{2-\alpha}, & i=0, \\ (n-i+2)^{3-\alpha} + (n-i)^{3-\alpha} - 2(n-i+1)^{3-\alpha}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ 1, & i=n. \end{cases} \quad (7)$$

1.2 结合 Newmark- β 法的逐步迭代格式

当分数阶阶次 $\alpha = 0.5$ 时, 分数阶 vdP 系统可以被完整地表示为

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)D^{0.5}x + x = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

其中 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. 将式 (3) 代入方程 (8), 在 t_n 时刻有

$$\ddot{x}_n + \mu(x_n^2 - 1) \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} \dot{x}_i + c_{n,n} \dot{x}_n \right) + x_n = 0, \quad (9)$$

其中 $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$. 根据 Newmark- β 法^[25], \dot{x}_n 和 \ddot{x}_n 可以通过位移 x_n 以及已知的状态变量来表示, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_n = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (x_n - x_{n-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{x}_{n-1}, \\ \ddot{x}_n = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{x}_{n-1}, \end{cases} \quad (10)$$

式中 β 和 γ 为 Newmark- β 法的控制参数, $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ 为时间步长. 进一步, 将方程 (10) 中的状态变量代入到方程 (9) 中, 可以得到系统 (8) 的完整迭代格式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} - \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + 1 \right) x_n + \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} \dot{x}_i - \frac{\gamma x_{n-1}}{\beta \Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right) x_n^2 \\ & + \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} x_n^3 - \frac{1}{\beta \Delta t^2} x_{n-1} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) x \\ & - \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} \dot{x}_i - \frac{\gamma x_{n-1}}{\beta \Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

整理方程 (11), 可得

$$Ax_n + Bx_n^2 + Cx_n^3 + D = 0, \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} - \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + 1, & C &= \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, \\ B &= \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} \dot{x}_i - \frac{\gamma x_{n-1}}{\beta \Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right), \\ D &= -\frac{x_{n-1}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{x}_{n-1}}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{x}_{n-1} - \mu \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} \dot{x}_i - \frac{\gamma x_{n-1}}{\beta \Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right). \end{aligned}$$

可以看出, 系数 A 、 B 、 C 、 D 是通过 β 、 γ 、 t_n 、 α 等表示的常数, 则方程 (12) 是关于 t_n 时刻未知位移 x_n 的非线性代数方程.

1.3 通过 Newton-Raphson 迭代法求解位移方程

方程 (12) 可以通过 Newton-Raphson 迭代法来求解. Newton-Raphson 迭代本质上是将非线性方程 $f(x) = 0$ 进行泰勒展开, 并保留一阶项得到线性化方程来寻求方程 $f(x) = 0$ 的根. 对于方程 (12), 有 $f(x_n) = Ax_n + Bx_n^2 + Cx_n^3 + D = 0$, 则 $f(x_n)$ 的泰勒展开为

$$f(x_n + \delta) = Ax_n + Bx_n^2 + Cx_n^3 + D + (A + 2Bx_n + 3Cx_n^2) \delta + o(\delta^2) = 0. \quad (13)$$

对于足够小的 δ , 忽略二阶及以上的项, 可得

$$\delta = -\frac{Ax_n + Bx_n^2 + Cx_n^3 + D}{A + 2Bx_n + 3Cx_n^2}. \quad (14)$$

进一步可得

$$x_{n+1} = x_n + \delta = x_n - \frac{Ax_n + Bx_n^2 + Cx_n^3 + D}{A + 2Bx_n + 3Cx_n^2}. \quad (15)$$

需要注意的是, 通过 Newton-Raphson 迭代求解 x_n , 需要选取一个合适的初值^[26]。通常选取上一时刻 t_{n-1} 的位移 x_{n-1} 作为下一时刻的迭代初值。获得位移 x_n 后, 将其代入方程 (10), 得到系统的速度和加速度。自此, 系统在 t_n 时刻所有的状态变量全部获得。重复多次, 就可获得分数阶 vdP 系统完整的时程响应。

2 数值算例

2.1 $0 < \alpha < 1$ 的分数阶 vdP 系统

首先假定分数阶阶次 $\alpha = 0.5$, 即以系统 (8) 为例, 取参数 $\mu = 0.8$. Newmark- β 法中的参数取值为 $\beta = 0.25$ 、 $\gamma = 0.5$. 由初始条件 $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1$ 可以计算出 \ddot{x}_0 , 进一步计算获得 t_1 的系数 A, B, C 和 D , 然后逐步获得系统的数值响应。图 1 为 $\alpha = 0.5$ 时系统 (8) 的时程响应, 图 2 是对应的相图。

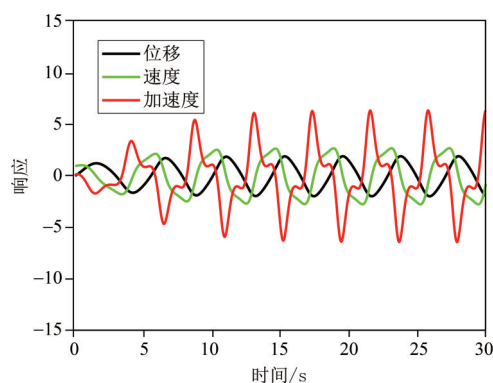


图1 系统(8)的时程响应

Fig. 1 The time histories of system (8)

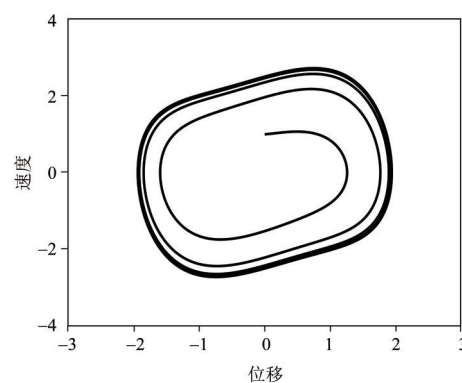


图2 系统(8)的相图

Fig. 2 Phase diagram of system (8)

由图 1 可以看出, 在最初的 15 s 内, 系统出现了瞬态响应, 但是逐渐地系统进入稳态响应, 对应的相图则出现了稳定的极限环。这说明本文所提的数值方法不会出现失稳现象, 可以稳定获得系统的数值响应。当分数阶阶次 $\alpha \rightarrow 1$ 时, 系统 (8) 将会退化为对应的整数阶 vdP 系统, 即

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

通过整数阶的数值方法验证本文所提方法的有效性。当 $\alpha = 1$ 时, 四阶 Runge-Kutta (RK) 法和本文所提方法获得的时程曲线和相图, 如图 3 所示。从图中可以看出, 无论是时程曲线还是相图, 两种方法获取的结果吻合很好。这证明本文的方法对于整数阶微分系统仍旧是有效的。

2.2 $1 < \alpha < 2$ 的分数阶 vdP 系统

不失一般性, 可以假定系统 (1) 中的分数阶阶次 $\alpha = 1.5$, $\mu = 0.8$. 则系统 (1) 有如下形式

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)D^{1.5}x + x = 0, & t \geq 0, \\ x(0) = 0, & \dot{x}(0) = 1. \end{cases} \quad (17)$$

与 $\alpha = 0.5$ 的讨论类似, 结合 Adams 离散和 Newmark- β 法, 可以得到系统 (17) 的逐步迭代格式

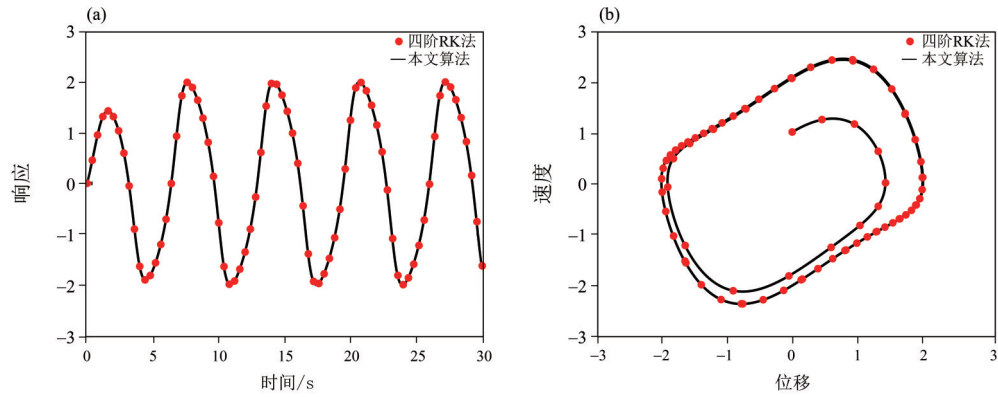


图3 $\alpha = 1$ 时, 四阶RK法和本文算法的时程曲线 (a) 和相图 (b)

Fig. 3 The time histories(a) and phase(b) obtained by fourth-order RK method and the algorithm of this paper when $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} - \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \frac{1}{\beta\Delta t^2} + 1 \right) x_n + \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} d_{i,n} \ddot{x}_i - \frac{x_{n-1}}{\beta\Delta t^2} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right) x_n^2 \\ & + \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \frac{1}{\beta\Delta t^2} x_n^3 - \frac{1}{\beta\Delta t^2} x_{n-1} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \\ & - \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} d_{i,n} \ddot{x}_i - \frac{x_{n-1}}{\beta\Delta t^2} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

同理, 由方程 (18) 得

$$A'x_n + B'x_n^2 + C'x_n^3 + D' = 0, \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} - \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \frac{1}{\beta\Delta t^2} + 1, & C' &= \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \frac{1}{\beta\Delta t^2}, \\ B' &= \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} d_{i,n} \ddot{x}_i - \frac{x_{n-1}}{\beta\Delta t^2} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right), \\ D' &= -\frac{1}{\beta\Delta t^2} x_{n-1} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} - \mu \frac{\Delta t^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} d_{i,n} \ddot{x}_i - \frac{x_{n-1}}{\beta\Delta t^2} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right). \end{aligned}$$

与上一个算例类似, 在 t_n 时刻系数 A', B', C' 和 D' 也是 $\beta, \gamma, t_n, \alpha$ 表示的常数, 则方程 (19) 是关于未知位移 x_n 的非线性代数方程。将 x_n 代入方程 (10) 得到系统的速度与加速度。

本算例中, Newmark- β 法中的参数取值与 2.1 节相同, 时间步长取 $\Delta t = 0.1$. $\alpha = 1.5$ 时, 系统 (17) 的时程响应和相图, 如图 4 和图 5 所示。

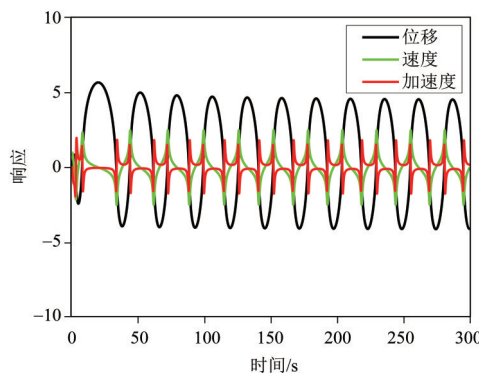


图4 系统(17)的时程曲线

Fig. 4 The time histories of system (17)

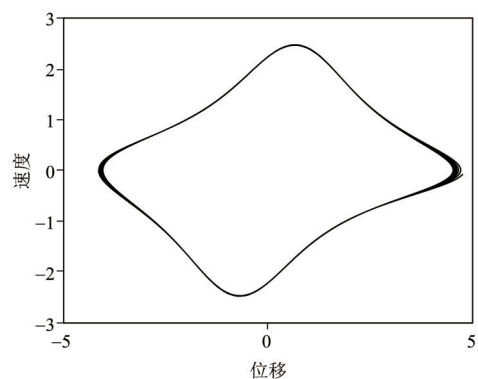


图5 系统(17)的相图

Fig. 5 Phase diagram of system (17)

从图4所示的时间历程可以看出, 由于初始状态的影响, 系统出现了瞬态响应, 经过一段时间后才进入稳态。且, 由于本算例中 $\alpha = 1.5$, 其时程曲线与 $\alpha = 0.5$ 时明显不同, 相图也有明显的区别。此外, $\alpha = 1.5$ 对应的响应频率比 $\alpha = 0.5$ 时要小得多。同样, 当分数阶阶次 $\alpha \rightarrow 2$ 时, 系统 (17) 也会退化为对应的整数阶 vdP 系统。

$\alpha = 2$ 时, 四阶 RK 法和本文所提方法获得的时程曲线和相图, 如图6所示。从图6可以看到, 本文方法和四阶 RK 法的结果吻合非常好。对比图4和图6 (a), 可以发现 $\alpha = 1.5$ 和 $\alpha = 2$ 时 vdP 系统的响应完全不同; 对于 $\alpha = 1.5$ 的分数阶 vdP 系统, 系统的速度和加速度都存在明显的尖峰。对比图5和图6 (b), 可以发现 $\alpha = 1.5$ 对应的相图更接近于一个方形, 而 $\alpha = 2$ 时的相图则是一个椭圆。同样的, 本文所提的离散格式和数值方法也可以很好地求解 $1 < \alpha < 2$ 的分数阶 vdP 系统。

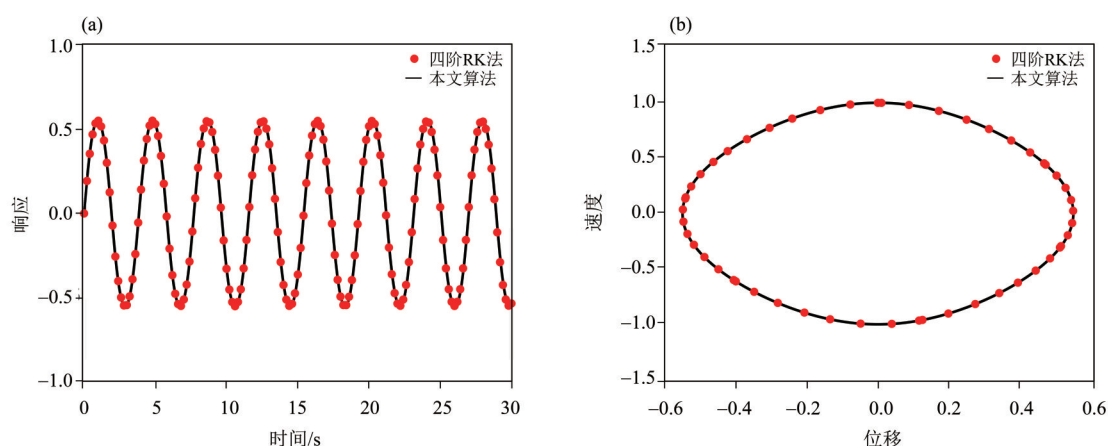


图6 $\alpha = 2$ 时, 四阶 RK 法和本文算法的时程曲线 (a) 和相图 (b)

Fig. 6 The time histories and phase obtained by fourth-order RK method (a) and the algorithm of this paper (b) when $\alpha = 2$

3 结 论

本文基于 Adams 离散和 Newmark- β 法, 提出了一种求解分数阶 van der Pol 系统的逐步迭代格式, 并分别讨论了 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 < \alpha < 2$ 对应的 vdP 系统的数值求解。结果表明, 本文所提方法可以稳定获得分数阶微分系统的数值解。此外, 我们还讨论了 $\alpha \rightarrow 1$ 和 $\alpha \rightarrow 2$ 时, 即分数阶 vdP 系统退化为整数阶 vdP 系统时的情形。结果表明, 本文所提算法和四阶 RK 法获得的结果吻合非常好。原则上, 本文所提的迭代格式适用于其他类型的分数阶微分系统。

参考文献:

- [1] 张丹伟, 刘济科, 黄建亮. 非线性系统准周期振动的多时间尺度 IHB 法[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2018, 57(6): 63-70.
- [2] 牛江川, 申永军, 杨绍普, 等. 分数阶 PID 控制对单自由度线性振子的影响[J]. 振动与冲击, 2016, 35(24): 88-95.
- [3] LIU G, WANG L, LUO W L, et al. Parameter identification of fractional order system using enhanced response sensitivity approach[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 67: 492-505.
- [4] 刘广, 刘济科, 吕中荣. 基于时域响应灵敏度分析的非线性系统参数识别[J]. 振动与冲击, 2018, 37(21): 213-219.
- [5] LIU G, WANG L, LIU J K, et al. Parameter identification of nonlinear aeroelastic system with time-delayed feedback control [J]. AIAA Journal, 2019, 58(1): 415-425.
- [6] LEUNG Y T, YANG H X, GUO Z J. The residue harmonic balance for fractional order van der Pol like oscillators[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 331(5): 1115-1126.
- [7] BARBOSA R S, MACHADO J A T, VINAGRE B M, et al. Analysis of the van der Pol oscillator containing derivatives of fractional order[J]. Journal of Vibration and Control, 2007, 13(9/10): 1291-1301.
- [8] CHEN J H, CHEN W C. Chaotic dynamics of the fractionally damped van der Pol equation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 35(1): 188-198.

- [9] 毛北行, 李巧利. 一类分数阶 Duffling-van der pol 系统的混沌同步[J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(2): 369-373.
- [10] 韦鹏, 申永军, 杨绍普. 分数阶 van der Pol 振子的超谐共振[J]. 物理学报, 2014, 63(1): 47-58.
- [11] WU B S, LIM C W. Large amplitude non-linear oscillations of a general conservative system[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2004, 39(5): 859-870.
- [12] LIU G, LU Z R, WANG L, et al. A new semi-analytical technique for nonlinear systems based on response sensitivity analysis[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 103(2): 1529-1551.
- [13] 刘洋, 李承楚, 牟永光. 任意偶数阶精度有限差分法数值模拟[J]. 石油地球物理勘探, 1998, 33(1): 1-10.
- [14] PRINCE P J, DORMAND J R. High order embedded Runge-Kutta formulae[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 1981, 7(1): 67-75.
- [15] 富明慧, 刘祚秋, 林敬华. 一种广义精细积分法[J]. 力学学报, 2007(5): 672-677.
- [16] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/4): 3-22.
- [17] 雷金贵, 陈文兵. 一类解非线性方程的 Newton 型迭代法[J]. 南京信息工程大学学报(自然科学版), 2009, 1(4): 377-381.
- [18] WEN S F, SHEN Y J, LI X H, et al. Dynamical analysis of mathieu equation with two kinds of van der Pol fractional-order terms[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016, 84: 130-138.
- [19] LIN R, LIU F. Fractional high order methods for the nonlinear fractional ordinary differential equation[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, 66(4): 856-869.
- [20] MEERSCHAERT M M, SCHEFFLER H P, TADJERAN C. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 211(1): 249-261.
- [21] MACDONALD C L, BHATTACHARYA N, SPROUSE B P, et al. Efficient computation of the Grünwald-Letnikov fractional diffusion derivative using adaptive time step memory[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 297: 221-236.
- [22] 李亚杰, 吴志强, 章国齐. 基于 Caputo 导数的分数阶非线性振动系统响应计算[J]. 计算力学学报, 2018, 35(4): 466-472.
- [23] ZAID O. Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives[J]. Applied Mathematics and Computations, 2005, 178(2): 527-533.
- [24] LIU Q X, LIU J K, CHEN Y M. An explicit hybrid method for multi-term fractional differential equations based on Adams and Runge-Kutta schemes[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(4): 2195-2203.
- [25] 刘广, 刘济科, 陈衍茂. 基于 Wilson- θ 和 Newmark- β 法的非线性动力学方程改进算法[J]. 计算力学学报, 2017, 34(4): 433-439.
- [26] LU Z R, LIU G, LIU J K, et al. Parameter identification of nonlinear fractional-order systems by enhanced response sensitivity approach[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(2): 1495-1512.

(责任编辑 王海蓉)

(终校 本刊编辑部)